

Matemática I

Cálculo Integral

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

Até agora o problema era

Dada uma função $f(x)$ determinar a sua função derivada $f'(x)$.

Agora coloca-se o problema inverso

Dada uma função $f(x)$ determinar a função $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Seja $f(x)$ uma função com domínio $D \subset \mathbb{R}$.

Definição

Chama-se **primitiva** de $f(x)$ a qualquer função $F(x)$, definida em D , tal que

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

A **primitivação** é a operação inversa da derivação e escreve-se

$$P f(x) = F(x)$$

Definição

Chama-se **integral indefinido** de $f(x) dx$ a qualquer função $F(x)$ definida em D tal que

$$dF(x) = f(x) dx \quad \forall x \in D$$

A **integração** é a operação inversa da diferenciação e escreve-se

$$\int f(x) dx = F(x)$$

Integral

Seja $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, isto é, $F(x)$ é tal que

$$F'(x) = f(x)$$

A função $G(x) = F(x) + C$ tem derivada

$$G'(x) = f(x)$$

ou seja, é também uma primitiva de $f(x)$. Isto significa que existe uma família de primitivas de $f(x)$ que diferem apenas de uma constante.

Assim, escrevemos

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

x variável de integração

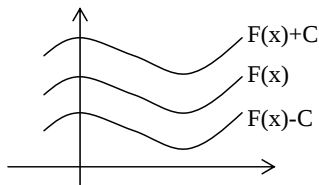
$f(x)$ função integranda

C constante de integração

Interpretação Geométrica

Consideremos a função $y = \int f(x) dx$, isto é, $y = F(x) + C$.

Esta função representa uma família de curvas no plano XOY , sendo cada curva obtida de outra por translação vertical.



É possível determinar a função cuja curva representativa passa num dado ponto $P(x_0, y_0)$. Basta substituir x_0 e y_0 na equação da família de curvas para obter $C_0 = y_0 - F(x_0)$. A curva que satisfaz a condição é

$$y = F(x) + C_0$$

Integrais Imediatos

$$u = u(x), m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(u^m)' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$$

$$\int u^n \cdot u' dx = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C$$

$$(a^u)' = a^u \cdot \ln(a) \cdot u'$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

$$(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$\int e^u \cdot u' dx = e^u + C$$

$$(\ln(u))' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

$$u = u(x)$$

$$(\operatorname{sen}(u))' = \cos(u) \cdot u'$$

$$\int \cos(u) \cdot u' dx = \operatorname{sen}(u) + C$$

$$(\cos(u))' = -\operatorname{sen}(u) \cdot u'$$

$$\int \operatorname{sen}(u) \cdot u' dx = -\cos(u) + C$$

$$(\operatorname{tg}(u))' = \sec^2(u) \cdot u'$$

$$\int \sec^2(u) \cdot u' dx = \operatorname{tg}(u) + C$$

$$(\operatorname{cotg}(u))' = -\operatorname{cosec}^2(u) \cdot u'$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(u) \cdot u' dx = -\operatorname{cotg}(u) + C$$

$$u = u(x)$$

$$(\sec(u))' = \sec(u) \operatorname{tg}(u) \cdot u'$$

$$\int \sec(u) \operatorname{tg}(u) \cdot u' dx = \sec(u) + C$$

$$(\operatorname{cosec}(u))' = -\operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \cdot u'$$

$$\int \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u) \cdot u' dx = -\operatorname{cosec}(u) + C$$

$$(\arcsen(u))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = \arcsen(u) + C$$

$$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' dx = \operatorname{arctg}(u) + C$$

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \left(\frac{d}{dx}(f(x)) \right) dx = f(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int f_k(x) dx$$

Exemplo:
$$\int \frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{x} dx = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$$

Exemplo:
$$\int \frac{5 - 3x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx = \frac{5}{2} \arcsen(2x) + \frac{3}{4} \sqrt{1 - 4x^2} + C$$

Integração por Substituição

Integração por Substituição

Seja g uma função contínua, que admite inversa e cuja derivada g' é também contínua.

$$x = g(t)$$

$$dx = g'(t)dt$$

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

Exemplo 1: $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx = 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2x-1}) + C$

Exemplo 2: $\int \frac{8x}{\sqrt{2+4x}} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(2+4x)^3} - 2\sqrt{2+4x} + C$

Exemplo 3: $\int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx = \ln |\ln(x)| + \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$

Exemplo 4: $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos(x - \ln(x)) dx = \sin(x - \ln(x)) + C$

Substituições Trigonométricas

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \quad x = a \operatorname{sen}(t), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2(t)} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2(t))} = \sqrt{a^2 \cos^2(t)} = a \cos(t)$$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx \quad x = a \operatorname{tg}(t), \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2(t)} = \sqrt{a^2(1 + \operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{a^2 \sec^2(t)} = a \sec(t)$$

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx \quad x = a \sec(t), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2(t) - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2(t) - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2(t)} = a \operatorname{tg}(t)$$

Substituições Trigonométricas

Em geral, se $u = u(x)$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx \quad u = a \sin(t)$$

$$\sqrt{a^2 - u^2} = a \cos(t)$$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + u^2}\right) dx \quad u = a \tan(t)$$

$$\sqrt{a^2 + u^2} = a \sec(t)$$

$$\int f\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right) dx \quad u = a \sec(t)$$

$$\sqrt{u^2 - a^2} = a \tan(t)$$

Exemplo 1: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C$

Exemplo 2: $\int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x} \right| + C$

Exemplo 3: $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x^2-9}} dx = \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3} \right| + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3}{x} \right) + C$

Exemplo 4:
$$\int \frac{\ln(x)+1}{x \ln(x) \sqrt{\ln^2(x)-9}} dx$$
$$= \ln \left| \frac{\ln(x) + \sqrt{\ln^2(x)-9}}{3} \right| + \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3}{\ln(x)} \right) + C$$

Substituições Trigonométricas

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$.

Usando a substituição trigonométrica $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $dx = 2 \sec^2(t) dt$ e

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4+4\operatorname{tg}^2(t)} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2\sec(t),$$

de onde

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) 2\sec(t)} 2\sec^2(t) dt = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t)} \sec(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}} \frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{sen}(t)} dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec}(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec}(t) - \operatorname{cotg}(t)| + C \end{aligned}$$

Substituições Trigonométricas

Exemplo 2: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$.

É agora necessário voltar à variável inicial x . Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\operatorname{cotg}(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \operatorname{cotg}^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2(t)} = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$$

Substituindo no integral vem

$$I = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec}(t) - \operatorname{cotg}(t)| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x} - \frac{2}{x} \right| + C$$

Integração por Partes

Integração por Partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Integrando ambos os membros

$$\int (u \cdot v)' dx = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

$$\Leftrightarrow u \cdot v = \int u' \cdot v dx + \int u \cdot v' dx$$

Fórmula de Integração por Partes

$$\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Se $u' = f(x)$ e $v = g(x)$

$$\int f(x) g(x) dx = F(x) g(x) - \int F(x) g'(x) dx$$

com $F(x) = \int f(x) dx$

Exemplo 1: $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$

Exemplo 2: $\int \arcsen(x) dx = x \arcsen(x) + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

Exemplo 3: $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$

Exemplo 4: $\int x \ln(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$